Trirotor 型 UAV のシステム解析と非線形制御

○片岡 泰之　関口 和真　三平 満司（東京工業大学）

Nonlinear Control and System Analysis of Trirotor UAV Model

∗ Y. Kataoka, K. Sekiguchi and M.Sampei (Tokyo Institute of Technology)

Abstract– This paper reveals the minimal number of inputs for hovering control to UAV based on nonlinear control system theory. Then, a nonlinear controller is designed to obtain meaningful motion for an underactuated UAV with the consideration of the limitation acknowledged through the model analysis. Throughout this paper, a particular UAV model having three rotors is considered as a controlled object. First, nonlinear state equations are computed with valid assumptions. Next, the model analysis reveals that hovering control is impossible for not only the suggesting model but also a generic three-inputs model through the argument of Locally Asymptotically Stabilizability(LAS). Finally, numerical simulation confirms that position control is realizable via Output Zeroing Control along with preferable attitude.

Key Words: UAV, Underactuated System, Nonlinear System Analysis, LAS, Output Zeroing Control

1　はじめに

UAV とは、三次元空間を移動する飛行体あるいはロボットを意味し、自動車等の地上で運動する機械システムに比べ, モビリティにおいて優位性がある。こうした特徴から、火星探査や地球環境の観測、橋やダムの定期検査、そして災害時における被害観測など、様々な分野における実用が期待されている。

UAV の制御問題は非線形制御理論の研究の観点だけでなく、工学的観点からも興味深い。UAV は三次元空間の位置と姿勢の制御、つまり $\mathbb{SE}(3)$ 空間の制御を必要とするが、提案されている UAV の多くは入力の数が状態の数よりも少ない劣駆動システムである。さらに、空中では動力学モデルを考慮するのが妥当であるので、二階の非ホロノミック拘束を受けるシステムに対する制御問題となる。こうした特徴を持つ劣駆動度が高い UAV を扱い、空中で緊急事態が発生した場合に使える有効な制御手法を提示することは工学的に大きな意味がある。例えば、ヘリコプターの事故数は飛行機に比べ 50 倍であり、死亡事故としては 130 倍の頻度で起きている。実はこうした統計データが、人がいる環境下で UAV を使用する危険性の高さを危惧する原因になり，実用化の歯止めとなっている。UAV を実用的に使用するためにも、フェイルセーフとしての制御系設計は重要である。

また、UAV に対して非線形システム論に基づく解析を行うことも興味深い。$\mathbb{SE}(3)$ 空間を運動する機械システムは、その次元数の高さ故に様々な構造を持つモデル [1,2] が提案されてきた。しかし本来は、可制御性等の制御理論的見解も考慮して設計するべきである。特に、UAV の基本的な運動であるホバリング制御や円運動を実現するために必要な入力の数を明らかにすることで、搭載するアクチュエータの数に対する設計指針を与えることができる。

本研究はこうした研究背景に基づき、ホバリングに必要な入力数を明らかにすることと、劣駆動度の高いシステムに対して有効な制御則を提案することを研究目的とする。本論文では、ケーススタディとして三つの入力を持つ TriRotor 型 UAV を制御対象として提案し、モデル解析と制御則の検討を行う。

この論文の構成は以下のようになっている．まず第二章では，本論文で扱う Trirotor 型 UAV の数学モデルを非線形状態方程式を導出する．次に第三章では，制御対象のシステム構造を解析する．特に局所的漸近可安定性について論じ，三入力を用いた時不変状態フィードバックではホバリング制御が不可能であることを示す．そして第四章では，出力零化制御によって位置制御と円運動を実現する制御器をそれぞれ設計する．数値シミュレーションによって所望の運動が実現可能であることを示す．最後に第五章にて，本論文の結論を述べる．

2　モデリング

本論文が提案する TriRotor 型 UAV を Fig.1 に示す。このモデルの最も大きな特徴は，ねじれ関係にある軸に取り付けられたローターであり、各軸に二種類のモーメントが寄与する点である。

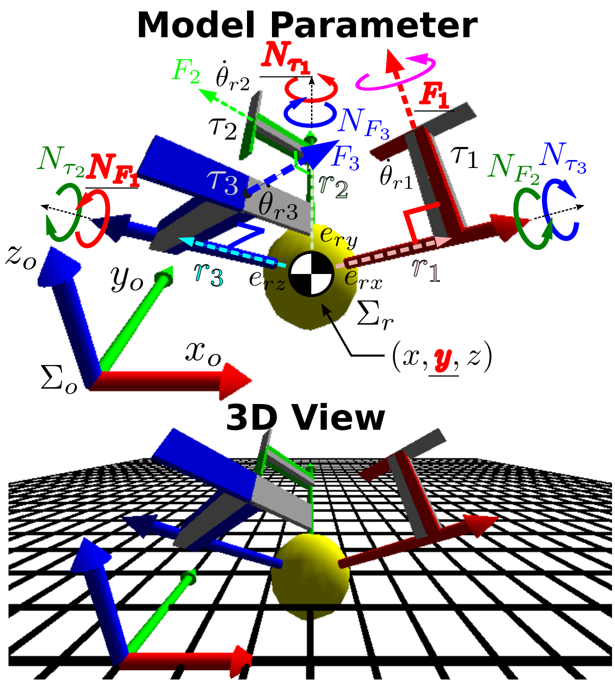


Fig. 1: Overview of UAV Model having Three Rotors

Table 1: Physical Variables

Σ_o	:	慣性座標系
Σ_r	:	運動座標系 (robot 座標)
$\boldsymbol{\xi}$	:	ロボットの重心位置：一般化座標 (x, y, z)
$\boldsymbol{\eta}$	:	ロボットの姿勢表現：オイラー角 (ϕ, θ, ψ)
$\boldsymbol{\omega}_r$	:	Σ_r から見たロボットの角速度ベクトル
$\dot{\theta}_{pi}$	:	ローター (propeller)i の角速度ベクトル
$\dot{\boldsymbol{\theta}}_p$	:	$\mathrm{diag}\{\dot{\theta}_{p3}, \dot{\theta}_{p1}, \dot{\theta}_{p2}\}$
F_{ri}	:	Σ_r から見た i 方向に発生する力
$\boldsymbol{F}_r$	:	$\mathrm{diag}\{F_{rx}, F_{ry}, F_{rz}\}$
N_{F_i}	:	F_i と重心間距離によって発生するトルク
N_{τ_i}	:	ローター i が発生する反トルク
$\boldsymbol{N}_r$	:	各軸に発生するモーメントの総和ベクトル

Table 2: Physical Parameters

m	:	ロボットの質量
$\boldsymbol{J}_r$	:	Σ_r 上で定義されるロボットの慣性テンソル
$\boldsymbol{D}_r$	:	空気抵抗による Σ_r でのロボットの粘性行列
$\boldsymbol{J}_p$	:	ローターの慣性行列 $\mathrm{diag}\{J_{p1}, J_{p2}, J_{p3}\}$
$\boldsymbol{D}_p$	:	ローターの粘性行列 $\mathrm{diag}\{D_{p1}, D_{p2}, D_{p3}\}$
k_{pi}	:	ローター i の特性に依存する係数
$\boldsymbol{r}_i$	:	重心と F_i の作用点間のベクトル
C_T	:	ローターの推力係数
ρ	:	空気密度
πR^2	:	ローターの円板面積
$(\dot{\theta}_r R)^2$	:	ローターの先端周速
g	:	重力加速度

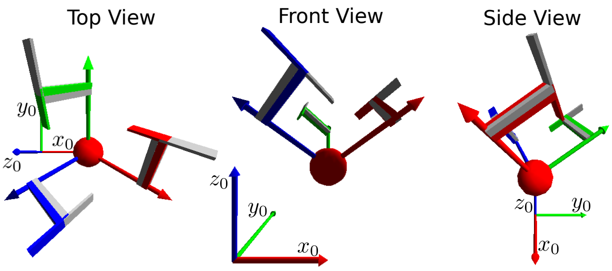


Fig. 2: Suggesting UAV Model from Different Angle

本モデルは三つのローターに対するトルク入力をシステムへの入力とし，数学的に三入力システムであることを強調しておく。文献 [5] や文献 [6] でも Trirotor モデルを提案しているが、彼らが提案するモデルはローター軸を傾けるためのサーボモータを持っているため、三入力システムではない。

ここで入力に対するシステムの挙動を概説しておこう．Fig.1 の赤字に示すように，例えばローター 1 が正回転すると，y 軸方向への正の並進力を発生する。また、距離と力の影響による z 軸回りに正のモーメントが，そしてモーター回転による等価トルクによって y 軸回りに負のモーメントが発生する．結果，各軸には相殺し合う二種類のモーメントが発生する．以下では，TrirotorUAV に対してもう少し細かい仮定を与える．

2.1 モデルに対する仮定

2.1.1 システムへの入力

入力は各ローターへのトルク入力を仮定する．θ_p は相対角で定義している。また、逆起電力も陽に考慮する。

$$\boldsymbol{J}_p \ddot{\boldsymbol{\theta}}_p + \boldsymbol{D}_p \dot{\boldsymbol{\theta}}_p = \boldsymbol{\tau} \tag{1}$$

2.1.2 入力トルクによる反作用

トルク入力に対して，相対的にロボットの質量が軽い場合はトルク入力の反作用，N_{τ_i} の影響を無視できない．トルクの反作用の影響は，入力トルクの逆モーメントが作用する．よって，全てのモーメントを陽に考慮すると，Σ_r におけるモーメントベクトルは (2) 表される．

$$\boldsymbol{N}_r = \begin{bmatrix} N_{F_2} - N_{\tau_3} \\ N_{F_3} - N_{\tau_1} \\ N_{F_1} - N_{\tau_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_2 \times F_2) - \tau_3 \\ (r_3 \times F_3) - \tau_1 \\ (r_1 \times F_1) - \tau_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

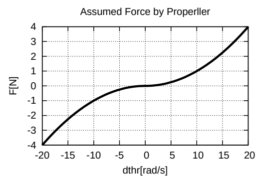
2.1.3 ローターによる並進力

ローターが発生する推進力は角速度の二乗に比例すると仮定する．空気力学によると，プロペラと推進力の関係は一般に (3) で表される．

$$F = C_T \rho \pi (R \dot{\theta}_p)^2 \tag{3}$$

ローター i に対する定数パラメータをまとめて k_{pi} と表現する．また右ねじの法則に基づき，ローターが正回転をすると軸方向に正の推進力を，逆回転すると逆の推進力を発生すると仮定する．これらの仮定をまとめると，プロペラが発生する推進力は以下の式で表される．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_r &= [F_{r3}, F_{r1}, F_{r2}]^T \\ &= \begin{bmatrix} k_{p3} \mathrm{sgn}(\dot{\theta}_{p3}) \dot{\theta}_{p3}^2 \\ k_{p1} \mathrm{sgn}(\dot{\theta}_{p1}) \dot{\theta}_{p1}^2 \\ k_{p2} \mathrm{sgn}(\dot{\theta}_{p2}) \dot{\theta}_{p2}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$



ここで，入力から位置姿勢までの相対次数について考察しておく．$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F_{ri} = 2 k_{p_i} \mathrm{sgn}(\dot{\theta}_{pi}) \dot{\theta}_{pi} \ddot{\theta}_{pi}$ より，トルク入力から重心位置までは相対次数が 3 である．また，入力トルクの反作用により，トルク入力から姿勢角までは相対次数 2 である。

2.1.4 本体の回転に伴う摩擦

プロペラの粘性だけでなく，ロボット本体の回転に伴って周囲の空気との間に抵抗が発生すると仮定する．つまり，ロボットにモーメントがかかり続けると姿勢角の変化速度は粘性項の影響によって一定値に収束する．

2.2 非線形状態方程式の導出

提案モデルと仮定に基づいて非線形状態方程式を導出する．姿勢表現には、様々な手法があるが、本論文では主にオイラー角による姿勢表現を用いる。オイラー角はシステムの解析がしやすい反面、ピッチ角 θ に関して $\cos\theta = 0$ で特異点を持つ短所がある．そこで、特異点問題がある場合は四元数モデルを用いて回避する。本節では、オイラー角を用いたモデルと四元数を用いたモデルのそれぞれに対して非線形状態方程式を導出する。

2.2.1 オイラー角モデル

ラグランジの方法とオイラー角を用いたモデルの状態変数を $\boldsymbol{q}_e$ とする．位置と姿勢の計 12 状態に加えて

プロペラの回転速度を考慮し，状態変数を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{q}_e = [\boldsymbol{\xi}^T, \dot{\boldsymbol{\xi}}^T, \boldsymbol{\eta}^T, \dot{\boldsymbol{\eta}}^T, \dot{\boldsymbol{\theta}}_r{}^T]^T \in \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{S}^3 \tag{5}$$

運動座標系 Σ_r の慣性座標系 Σ_0 に対する回転行列をロール角 (ϕ)・ピッチ角 (θ)・ヨー (ψ) 角で定義する．

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{R}(\theta,\phi,\psi) = \boldsymbol{R}_z(\psi)\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\phi)\\
&= \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & -C_\phi S_\psi + C_\psi S_\phi S_\theta & S_\phi S_\psi + C_\phi C_\psi S_\theta \\ C_\theta S_\psi & C_\phi C_\psi + S_\phi S_\psi S_\theta & -C_\psi S_\phi + C_\phi S_\psi S_\theta \\ -S_\theta & C_\theta S_\phi & C_\phi C_\theta \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} R_{11}(\theta,\psi) & R_{12}(\phi,\theta,\psi) & R_{13}(\phi,\theta,\psi) \\ R_{21}(\theta,\psi) & R_{22}(\phi,\theta,\psi) & R_{23}(\phi,\theta,\psi) \\ R_{31}(\theta) & R_{32}(\theta,\phi) & R_{33}(\phi,\theta) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

簡略化のため，$S_* = \sin *, C_* = \cos *$ の表記を用いている．

この回転行列は，運動座標系 Σ_r からみた角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_r = [\omega_{1r}, \omega_{2r}, \omega_{3r}]^T$ を基準座標系 Σ_0 の基底ベクトルで表現されるベクトル $\boldsymbol{\omega}_0 = [\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}]$ に変換すると定義し，(7) の関係を満たす．

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{R}(\theta,\phi,\psi)\boldsymbol{\omega}_r \tag{7}$$

また各軸回りの回転行列を用いると，オイラー角の速度ベクトルと運動座標系の回転軸回りの角速度ベクトルの関係は (8) の座標変換行列で表される．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_r &= \boldsymbol{R}_x(\phi)^T\boldsymbol{R}_y(\theta)^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \boldsymbol{R}_x(\phi)^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}(\phi,\theta) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{8}$$

また、モーメントに関するの座標変換行列も仮想仕事の原理から求められる。

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\omega}_r)^T\boldsymbol{N}_r &= (\boldsymbol{\delta}_\eta)^T\boldsymbol{N}_\eta \\
\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\omega}_r^T\boldsymbol{N}_r &= \dot{\boldsymbol{\eta}}^T\boldsymbol{N}_\eta \\
\Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\phi,\theta)^T\boldsymbol{N}_r &= \boldsymbol{N}_\eta
\end{aligned} \tag{9}$$

以上の定義を用いると、システムのラグランジアン及び消散エネルギーは，(12) 及び (13) となる．

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{\xi}}^T\dot{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_r^T(\phi,\theta,\dot{\boldsymbol{\eta}})\boldsymbol{J}_r\boldsymbol{\omega}_r(\phi,\theta,\dot{\boldsymbol{\eta}})\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}_p + \boldsymbol{\omega}_r\right)^T\boldsymbol{J}_p\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}_p + \boldsymbol{\omega}_r\right)
\end{aligned} \tag{10}$$

$$U = mgz \tag{11}$$

$$L = L(z,\phi,\theta,\dot{\boldsymbol{\xi}},\dot{\boldsymbol{\eta}},\dot{\boldsymbol{\theta}}_p) = K - U \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_r^T(\phi,\theta,\dot{\boldsymbol{\eta}})\boldsymbol{D}_r\boldsymbol{\omega}_r(\phi,\theta,\dot{\boldsymbol{\eta}})\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}_p + \boldsymbol{\omega}_r(\phi,\theta,\dot{\boldsymbol{\eta}})\right)^T\boldsymbol{D}_p\left(\dot{\boldsymbol{\theta}}_p + \boldsymbol{\omega}_r(\phi,\theta,\dot{\boldsymbol{\eta}})\right)
\end{aligned} \tag{13}$$

(12) より，システムのラグランジアンが ψ に依存しないことが分かる．この性質は後のモデルの解析に有用となる特徴なのでここで特筆しておく．仮想仕事の原理による座標変換に注意し、ラグランジ法を用いるとオイラー角を用いた運動方程式は (14) で表される。

$$\boldsymbol{M}_e(\boldsymbol{\eta})\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\theta}}_p \end{bmatrix} + \boldsymbol{C}_e(\boldsymbol{\eta},\dot{\boldsymbol{\xi}},\dot{\boldsymbol{\eta}},\dot{\boldsymbol{\theta}}_p) + \boldsymbol{G}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}\boldsymbol{F}_r \\ \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{N}_r \\ \boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \tag{14}$$

この運動方程式 (14) を変形して，15 次元の非線形状態方程式 (15) を得る．

$$\dot{\boldsymbol{q}}_e = \boldsymbol{f}_e(\boldsymbol{q}_e) + \boldsymbol{g}_e(\boldsymbol{q}_e)\boldsymbol{\tau} \quad \text{where } \boldsymbol{f}_e(\boldsymbol{q}_e) \in \mathbb{R}^{15\times 1}, \boldsymbol{g}_e(\boldsymbol{q}_e) \in \mathbb{R}^{15\times 3} \tag{15}$$

2.2.2 四元数モデル

姿勢角表現を四元数 (別名クオータニオン or オイラーパラメータ) とオイラーの運動方程式を用いて表現する．まず，四元数の定義を以下にまとめる．

$$\boldsymbol{e} = [e_0, e_1, e_2, e_3]^T \in \mathbb{S}^3 \tag{16}$$

$$= [\cos\frac{\theta}{2}, l\sin\frac{\theta}{2}, m\sin\frac{\theta}{2}, n\sin\frac{\theta}{2}]^T \tag{17}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = [l, m, n]^T \tag{18}$$

$$\boldsymbol{q}_q = [\boldsymbol{\xi}^T\dot{\boldsymbol{\xi}}^T\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{\omega}_r^T\dot{\boldsymbol{\theta}}_r{}^T]^T \in \mathbb{R}^{12} \times \mathbb{S}^3 \tag{19}$$

$\boldsymbol{e}$ は四元数，$\boldsymbol{\kappa}$ は瞬間回転軸ベクトル，θ は $\boldsymbol{\kappa}$ 回りの回転角，$\boldsymbol{q}_q$ は四元数モデルの状態変数を表している．状態変数は 16 変数だが，この表現は冗長性を含んだモデル表現であることに注意する．ここで本モデル表現の姿勢角のダイナミクスは以下のように表される．

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{e} & \begin{pmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} - 1) \\ \boldsymbol{\omega}_r \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{J}_r(\boldsymbol{\omega}_r) = -\boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{J}_r\boldsymbol{\omega}_r) + \boldsymbol{N}_r \tag{21}$$

(21) で示されるオイラーの運動方程式によって，運動座標系上で見た角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_r$ のダイナミクスを表現している．以上，四元数でモデル表現上の特異点を回避した非線形状態方程式は (22) で表される．

$$\dot{\boldsymbol{q}}_q = \boldsymbol{f}_q(\boldsymbol{q}_q) + \boldsymbol{g}_q(\boldsymbol{q}_q)\boldsymbol{\tau} \quad \text{where } \boldsymbol{f}_q(\boldsymbol{q}_q) \in \mathbb{R}^{16\times 1}, \boldsymbol{g}_q(\boldsymbol{q}_q) \in \mathbb{R}^{16\times 3} \tag{22}$$

3 モデル解析

本節では，オイラー角モデル (15) を用いて UAV モデルのシステム解析を行う．

3.1 局所的漸近可安定性 (LAS)

本システムの位置姿勢に対する局所的漸近可安定性 (Locally Asymptotically Stabilizability) は，ホバリング制御が可能か否を論じることに対応する．まず，本論文で扱う UAV モデルに関して平衡点集合を解析す

る。そして、LAS の必要条件に関する定理,「平衡点集合が局所的に部分多様体となっている場合には，その次元が制御入力の数と等しいことがLAS の必要条件である」[8] を用いることで，ホバリングが不可能であるという結果を得た．以下に定理と証明をまとめる．

Theorem 1

Trirotor 型 UAV モデル (15) は、三入力を用いた連続時不変状態フィードバックで全状態を局所的漸近安定化させせることは不可能

Proof

局所的漸近安定化には平衡点の存在が必要なので，まず平衡点の存在性を解析的にチェックする．もし平衡点 $\boldsymbol{q}_e^*$ が存在するならば，$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{0}, \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\alpha}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)$ が成立する．本システムにおける平衡点においては $\boldsymbol{\tau} \neq \boldsymbol{0}$ であることに注意する．

$$\dot{\boldsymbol{q}}_e = \boldsymbol{f}_e(\boldsymbol{q}_e) + \boldsymbol{g}_e(\boldsymbol{q}_e)\boldsymbol{\tau}|_{\dot{\boldsymbol{\xi}}=\boldsymbol{0},\dot{\boldsymbol{\eta}}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\alpha}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_p)} = \boldsymbol{0} \quad (23)$$

上式の拘束式は実質的に 15 本から 6 本に低減化され，(24) となる．

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1(\phi,\theta,\psi,\dot{\theta}_{r1},\dot{\theta}_{r2},\dot{\theta}_{r3}) \\ \gamma_2(\phi,\theta,\psi,\dot{\theta}_{r1},\dot{\theta}_{r2},\dot{\theta}_{r3}) \\ \gamma_3(\phi,\theta,\dot{\theta}_{r1},\dot{\theta}_{r2},\dot{\theta}_{r3}) - g \\ \gamma_4(\phi,\theta,\dot{\theta}_{r1},\dot{\theta}_{r2},\dot{\theta}_{r3}) \\ \gamma_5(\phi,\theta,\dot{\theta}_{r1},\dot{\theta}_{r2},\dot{\theta}_{r3}) \\ \gamma_6(\phi,\theta,\dot{\theta}_{r1},\dot{\theta}_{r2},\dot{\theta}_{r3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$\ddot{x} = 0, \ddot{y} = 0$ に関して (25) に詳細を示す．

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_\psi & C_\psi \\ -C_\psi & S_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{kS_\phi\dot{\theta}_{p2}^2}{m} - \frac{kC_\phi\dot{\theta}_{p1}^2}{m} \\ \frac{kC_\phi\dot{\theta}_{p2}^2 S_\theta}{m} + \frac{kS_\phi\dot{\theta}_{p1}^2 S_\theta}{m} + \frac{k\dot{\theta}_{p3}^2 C_\theta}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

(25) より、ψ が寄与する行列は常に逆行列によって消去可能である。つまり、ψ は拘束式に寄与せず，任意の値を取れることを意味している．ここまでの議論により，平衡点が存在するための条件は (25) の６本の拘束式を満たす５変数の解 $(\phi^*, \theta^*, \theta_{r1}^*, \theta_{r2}^*, \theta_{r3}^*)$ が存在することと等価である．以下では平衡点が存在する場合と存在しない場合について考える．

- 連立方程式の解が存在しない場合
  平衡点がなければ，局所的漸近安定化は不可能.
- 連立方程式の解が存在する場合
  以下の関係を満たすように，プロペラの特性を調整する等の物理パラメータの制約条件 (26) の下では，平衡点 $\boldsymbol{q}^*$ が存在する．

$$k_p = \frac{4\sqrt{3}d_p^2}{l_1^2 mg} \quad (26)$$

しかしながら，平衡点集合と局所的漸近安定化の可能性を論じた石川の結果 [8] より，LAS の可能性はないことが証明できる．平衡点集合は，$N^* = \{x, y, z, \psi\} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}$ の４次元に対して，入力数は３つ．よって，上記の必要条件を満たさないので，連続時不変フィードバックによって局所的漸近安定化は不可能. □

ここでは、連続状態時不変状態フィードバックを用いた制御ではホバリングが不可能であることを示していることに注意する。平衡点を持つ制約条件の下で、不連続あるいは時変状態フィードバックを用いればホバリング制御を実現できる可能性はある。

Theorem 2

(14) で表現される一般の UAV モデルについて，三入力を用いた連続時不変状態フィードバックで全状態を局所的漸近安定化させせることは不可能

Proof

Theorem1 と同様の証明の手続きで証明が可能．(12) と (13) は ψ に依存しない。さらに、ラグランジの運動方程式 (28) より ψ が寄与するのは回転行列のみであることが分かる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\xi}} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}} = \boldsymbol{R}(\theta,\phi,\psi)\boldsymbol{F}_r(\dot{\boldsymbol{\theta}}_r) \quad (27)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_t}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_t} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}_t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}^T(\theta,\phi)\boldsymbol{N}_r(\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{\theta}}_r) \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} \quad (28)$$

これにより、Theorem1 と同様に常に逆行列によって ψ は消去可能なので、ψ が平衡点集合に含まれることが示される．Theorem1 と同様に平衡点集合と入力数の関係 [8] から、LAS はない。 □

まず、本定理が扱うモデルのクラスの広さについて考察する。(14) は一般の $\mathbb{SE}(3)$ 空間上の剛体の動力学モデルをオイラー角を用いて表現している。このモデルは、一般 UAV の動力学モデルを導出している文献 [4] と比較しても十分広いクラスの動力学モデルを考慮していると考えられる。次に、この事実をより直感的に説明する。ホバリングが実現できるならば、その状態は位置 x, y, z とヨー角 ψ に依存しないことを想像するのは難しくない。よって、平衡点集合は常に４次元となる。また、Theorem2 の結果は、アクチュエータの種類や取り付け位置、そして剛体の特性等の機械システムの特徴に依存せず、ψ は常に平衡点集合に含まれることを示している。よって、三入力を有する動力学モデルに対しては、連続時不変状態フィードバックで全状態を局所的漸近安定化させせることは不可能である。

3.2 可制御性

平衡点の解析から、ダイナミクスから ψ を除去した部分空間に対して可制御性の解析を行う。(14) から ψ を無視した $\dot{\boldsymbol{q}}_c = \boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{q}_c) + \boldsymbol{g}_c(\boldsymbol{q}_c)\boldsymbol{\tau}$ に対して，ロボットの姿勢が Fig.1 のような" 上向き" になる平衡点近傍において近似線形システムの可制御性を確認した．平衡点は、ψ を任意値、そして $\dot{\psi}$ と $\dot{\theta}_p$ は解析解 (29) を採用し、平衡状態としている。

$$\boldsymbol{q}_c^* = [0,0,0,0,0,0,\frac{\pi}{4},\tan^{-1}\left(\frac{-1.0}{\sqrt{2.0}}\right),0,0,\dot{\psi}^*\dot{\theta}_p^*,\dot{\theta}_p^*,\dot{\theta}_p^*]^T$$

$$\dot{\psi}^* = -\frac{3^{\frac{1}{4}}d_{p1}\sqrt{gk_{p1}m} - 2gk_{p1}l_1 m}{2d_{r1}k_{p1}}, \dot{\theta}_p^* = \sqrt{\frac{gm}{\sqrt{3}k_r}} \quad (29)$$

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}_c}{\partial \boldsymbol{q}_c}\right|_{\boldsymbol{q}_c=\boldsymbol{q}_c^*}, \ \boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}_c}{\partial \boldsymbol{q}_c}\right|_{\boldsymbol{q}_c=\boldsymbol{q}_c^*} \quad (30)$$

$$rank\,(\mathcal{C}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})) = 14$$

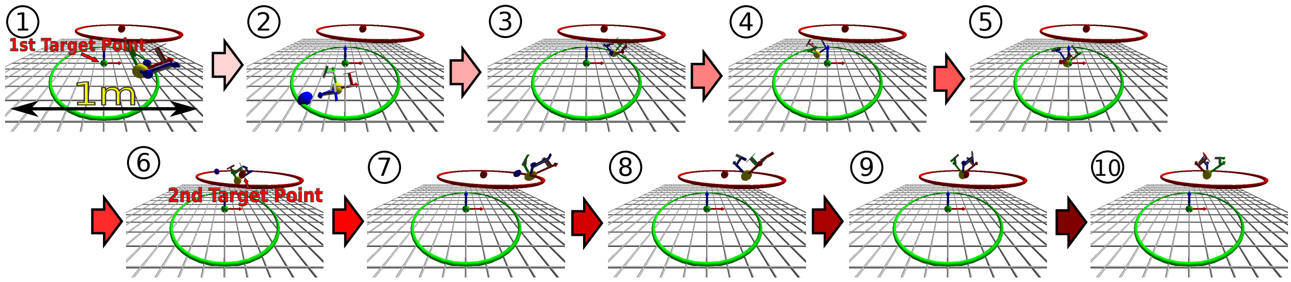


Fig. 3: Position and Attitude Control via Output Zeroing realizing Spiral Motion

部分空間においてフルランクとなっているので，ψ 以外の状態に関しては，可制御である．

4　制御系設計

前節の結果より、本システムは連続時不変状態フィードバックではホバリング制御が不可能であることを示した。そこで以下の二つを制御目標を設定する。

- 位置とヨー角 (ψ) 以外の姿勢の制御
- 任意の中心周りの円運動

4.1　MIMO 系の出力零化制御

制御器の設計方法として MIMO 系の出力零化制御を用いる．以下に，三入力系における出力零化制御器の設計法の概略を示す．座標変換 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{q}_e) = [\phi_1, ...\phi_n]^T$ を設計する．出力関数 h_i に対する相対次数を r_i としたとき，出力関数 h_i を用いて座標変換を以下のように設計する．

$$\phi_1^i = h_i,\ \phi_2^i = L_f h_i,\ \cdots,\ \phi_{r_i}^i = L_f^{r_i-1} h_i \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\sigma}^3]^T,\ \boldsymbol{\sigma}^i = [\phi_1^i, \cdots, \phi_{r_i}^i]^T \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\zeta} = [\phi_{r+1}^i, \phi_{r+2}^i, \cdots, \phi_n^i]^T,\ r = r_1 + r_2 + r_3 \tag{33}$$

この座標変換は平衡点 $\boldsymbol{x}_o$ の近傍において局所的に微分同相である必要がある．そして，システムに (34) で表現されるフィードバック入力を印加することによって，元のシステムを r 次元の線形化サブシステム $\boldsymbol{\sigma}$ と $n-r$ 次元の不可観測部分空間の非線形サブシステム $\boldsymbol{\zeta}$ に分解することができる．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\alpha}^{-1}(\boldsymbol{q}_e)\left(\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{q}_e) - \boldsymbol{v}\right) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}_e) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{q}_e) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$a_{ij} = L_{g_{e_i}} L_{f_e}^2 h_j(\boldsymbol{q}_e),\ b_j = L_{f_e}^3 h_j(\boldsymbol{q}_e) \tag{36}$$

このとき，線形サブシステム $\boldsymbol{\sigma}$ は (37) となる。

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} \tag{37}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}^{r_1\times r_2} & \boldsymbol{O}^{r_1\times r_3} \\ \boldsymbol{O}^{r_2\times r_1} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O}^{r_2\times r_3} \\ \boldsymbol{O}^{r_3\times r_1} & \boldsymbol{O}^{r_3\times r_2} & \boldsymbol{A}_3 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$\boldsymbol{A}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}^{(r_i-1)\times 1} & \boldsymbol{I}^{(r_i-1)\times(r_i-1)} \\ \boldsymbol{O}^{1\times 1} & \boldsymbol{O}^{1\times(r_i-1)} \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{O}^{r_1\times 1} & \boldsymbol{O}^{r_1\times 1} \\ \boldsymbol{O}^{r_2\times 1} & \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{O}^{r_2\times 1} \\ \boldsymbol{O}^{r_3\times 1} & \boldsymbol{O}^{r_3\times 1} & \boldsymbol{B}_3 \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}^{(r_i-1)\times 1} \\ \boldsymbol{I}^{1\times 1} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$\boldsymbol{v}$を LQ 最適制御等の線形制御理論を用いることで出力関数を零化することができる．一方，非線形サブシステムは，(42) で表される．

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\zeta}) \tag{42}$$

この出力零化制御器には注意すべき点がある．制御器の設計の際には，入力変換･座標変換による特異点，つまり $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}_{eq})$ のランク落ちに注意しなければならない．また所望の出力零化が達成されたあとの Zero Dynamics($\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\zeta})$) が所望のダイナミクスになるような制御器の設計が必要となる．

4.2　位置制御

三次元空間内でヨー角 (ψ) 以外の姿勢と位置の制御を実現する制御器を設計する．任意の位置における出力関数構造の候補として，時不変制御器の候補の一つとして位置制御を行う出力関数構造が考えられる．

$$\boldsymbol{h}_1 = \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \\ z - z_r \end{bmatrix} \tag{43}$$

それぞれの出力関数に対する相対次数は $r_i = 3 (i = 1, 2, 3)$ となっており，姿勢とプロペラに関する 6 次の Zero Dynamics が残る．制御器 $\boldsymbol{h}_1$ の結果は，初期状態に依存して収束する姿勢が変わってしまい，姿勢を上向きにすることは非常に困難である．しかしながら，実際のアプリケーションを考える上では，ロール角 ϕ とピッチ角 θ を UAV が上向きになる姿勢角 (30) に制御する必要がある．

そこで，x-y 平面で時間の経過と共に螺旋運動行いながら中心位置に収束させる制御器 $\boldsymbol{h}_2$ を考える．

$$\boldsymbol{h}_2 = \begin{bmatrix} x - (x_r + A(t)\cos(2\pi f t)) \\ y - (y_r - A(t)\sin(2\pi f t)) \\ z - z_r \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$A(t) = -k\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\rho * (t - \delta)\right) + k,\ k = \frac{r_o}{2} \tag{45}$$

ここで，$\boldsymbol{\xi}_r = [x_r, y_r, z_r]^T$ は任意の回転の中心座標を表す。本制御器を用いて，目標値 $\boldsymbol{\xi}_r^1 = [x_{r1}, y_{r1}, z_{r1}]^T = [0, 0, 0]^T$ から 50 秒後に $\boldsymbol{\xi}_r^2 = [x_{r2}, y_{r2}, z_{r2}]^T = [20, 25, 30]^T$ へ目標値を切り替えた移動制御の応答結果を Fig.3 と Fig.4 とに示す．数値シミュレーションには，Table3 で示すパラメータを採用した．Fig.4 は，ムービングターゲットに基づく時変出力関数構造によって位置を制御することで，Zero Dynamics である姿勢角も所望の値に制御されることを示している．

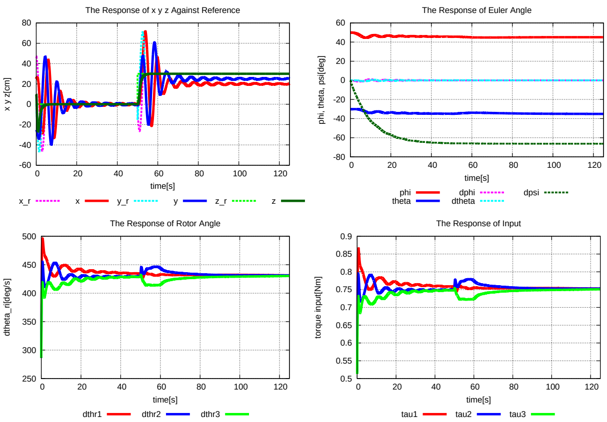


Fig. 4: Simulation Results of Maneuver Control

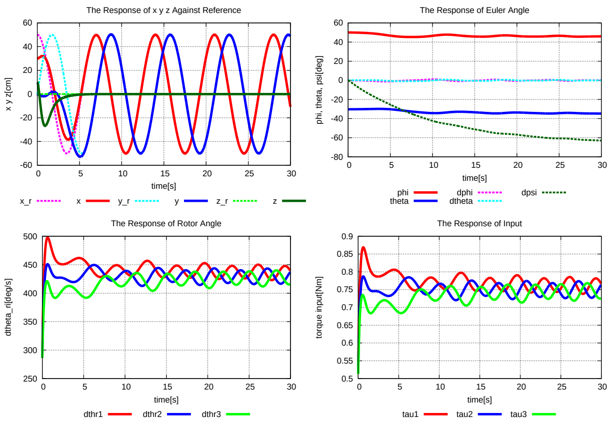


Fig. 5: Simulation Results of Circle Motion Control

Table 3: Simulation Parameters

m	:	ロボットの質量	:	0.10 [kg]
$\lvert r_i \rvert$	:	重心プロペラ軸間距離	:	15 [cm]
g	:	重力加速度	:	9.8 [kgm^2]
A	:	円運動の半径	:	50 [cm]
ρ	:	螺旋半径の減少率	:	0.5
δ	:	螺旋半径変化の変曲点	:	10.0[s]

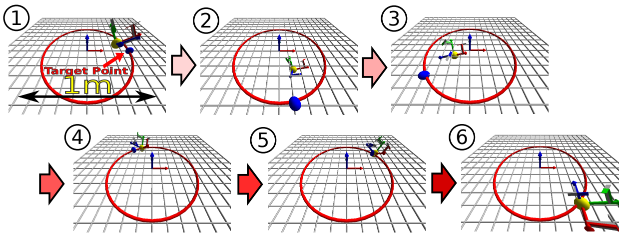


Fig. 6: Simulation Movie of Uniform Circle Motion

4.3 円運動制御

$x-y$ 平面上で円軌道を描き，z =const を達成する時変な出力関数構造を以下のように設計する．位置制御の制御器と同様に重心位置に対するムービングターゲットを設計する．

$$\boldsymbol{h}_3 = \begin{bmatrix} x - A\cos(2\pi f t)) \\ y + A\sin(2\pi f t)) \\ z - z_r \end{bmatrix}$$

Fig.5 に出力零化制御の応答結果を示す．

まず，Fig.6 より，円軌道を描くムービングターゲットに追従していることが確認できる．また，Fig.5 より円軌道を描いている際は姿勢角は一定に収束せず，さらに本制御器ではロボットの自転周期と公転周期が一致しているわけでないこともわかる．自転周期と公転周期を一致させながら姿勢角を制御できれば、例えばカメラを有するロボットが中心の被写体を撮影することが実現できる。

5 結論

本論文では，まず三つのローターを入力とする UAV モデルを提案し、非線形状態方程式を導出した．次にシステムの解析の結果、提案する UAV モデルは、平衡点集合と入力数の関係から連続時不変状態フィードバックでは局所的漸近可安定化が不可能であることを示した。また，同様の一般の三入力を有する動力学モデルに拡張し、連続時不変状態フィードバックでホバリングを実現するためには少なくとも四入力を有する機械システムの設計が必要であることを示した。そして，制御器の設計では、三つの入力で三次元空間の位置制御と円運動制御を行った。両者の運動を達成するために、出力零化制御を用い Zero Dynamics が望みの運動を達成する数値シミュレーションの結果を得た。

参考文献

1) Gabriel M. Hoffmann, Huang, H.S.L.W. and Tomlin, C.J. “Quadrotor helicopter flight dynamics and control: Theory and experiment” *Proc. of AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. 2007

2) Hugo Romero, Sergio Salazar, Anand Sanchez and Rogelio Lozano: “A New UAV Configuration Having Eight Rotors: Dynamical Model and Real-Time Control” , *Proc. of IEEE Conference on Decision and Control*, pp6418-6423, 2010

3) Christopher I.Byrnes and Alberto Isidori:”On the Attitude Stabilization of Rigid Spacecraft”, *Automatica*, Vol.27, No.1, pp.87-95, 1991

4) T. Cheviron, A. Chriette and F. Plestan “Generic Nonlinear Model of Reduced Scale UAVs”, *Proc. of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp.3271-3276, 2009

5) Sergio Salazar-Cruz, Farid Kendoul, Rogelio Lozano and Isabelle Fantoni, “Real-Time Control of a Small-Scale Helicopter Having Three Rotors”, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, pp.2924-2929, 2006

6) Penghui Fan, Xinhua Wang and Kai-Yuan Cai, “Design and Control of a Tri-Rotor Aircraft”, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Control and Automation*, pp.1972-1977, 2010

7) Holger Voos and Haitham Bou-Ammar, “Nonlinear Tracking and Landing Controller for Quadrotor Aerial Robots”, *Proc. of IEEE Multi-Conference on Systems and Control*, pp.2136-2142, 2010

8) M. Ishikawa and M. Sampei, “On equlibria set and feedback stabilizability of nonolinear control systems” *Proc. of IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design*, 637-642, 1998

9) Hassan K.Khalil, “Nonlinear Systrems Third Edition” Prentice Hall, 2002

10) Goldstein, H. “Classical Mechanics, Second Edition”, Addison-Wesley Publishing Company, 1980

11) 石島，島，三平ら，“非線形システム論” 計測自動制御学会，コロナ社，1993

12) 美多 勉，“非線形制御入門” 昭晃堂，2000